Задание 21. Разбор функций с модулем у Полякова К.Ю.

Пример задания:

Р-17. *Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:*

```
Var a,b,t,M,R:integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=abs( abs(x-5) + abs(x+5) - 3) + 12;
end;
BEGIN
  a:=-20; b:=20;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)<R)then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M+R);
END.
```

Решение:

1) заметим, что в программе есть цикл, в котором переменная **t** принимает последовательно все целые значения в интервале от **a** до **b**:

```
for t:=a to b do begin
  ...
end;
```

2) до начала цикла в переменную M записывается значение **a**, а в переменную **R** – значение функции в точке **a**:

```
M:=a; R:=F(a);
```

3) внутри цикла есть условный оператор, в котором вычисляется значение функции **F(t)** и сравнивается со значением переменной **R**:

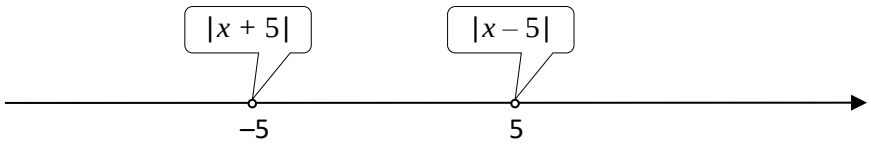
```
if (F(t)<R)then begin
  M:=t;
  R:=F(t);
end;
```

если новое значение функции меньше, чем значение **R**, в **R** записывается значение функции в точке **t**, а в переменной **M** запоминается само значение t (аргумент функции, соответствующий значению в **R**)

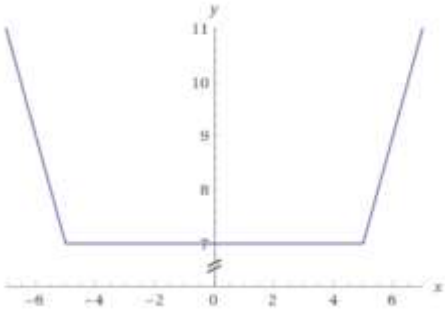
4) в результате анализа пп. 1-3 можно сделать вывод, что цикл ищет минимум функции **F(t)** на интервале от **a** до **b**, и после выполнения цикла в переменной M оказывается значение аргумента t, при котором функция достигает минимума на заданном интервале (здесь это интервал [-20, 20])

5) запишем заданную функцию в привычном «математическом» виде:
$f(x) = ||x - 5| + |x + 5| - 3| + 12$
чтобы найти минимум этой функции без ручного перебора всех целых значений x, нам нужно представлять, как идёт её график

6) сначала рассмотрим функцию под знаком «большого» модуля $g(x) = |x - 5| + |x + 5| - 3$;
7) находим нули выражений под знаком модуля и отмечаем их на числовой оси:



8) раскрываем модули отдельно для каждого интервала; рассматриваем интервал $(-\infty; -5)$, раскрываем модули (оба с обратным знаком):
$g(x) = -(x - 5) - (x + 5) - 3 = -2x - 3$
на этом интервале функция убывает
9) рассматриваем полуинтервал [–5; 5), раскрываем модули:
$g(x) = -(x - 5) + (x + 5) - 3 = 7$
это значит, что на полуинтервале [–5; 5) функция принимает постоянное значение
10) рассматриваем полуинтервал $[5; \infty)$, раскрываем модули:
$g(x) = (x - 5) + (x + 5) - 3 = 2x - 3$
на этом интервале функция возрастает
график функции показан на рисунке справа



11) как мы показали, на всей числовой оси функция $g(x)$ принимает положительные значения, так что $|g(x)| = g(x)$, поэтому $f(x) = |g(x)| + 12 = g(x) + 12$
12) во всех точках на отрезке [-5; 5] функции $f(x)$ равно 7 + 12 = 19, поэтому программа найдёт одну из этих точек как точку минимума
13) осталось понять, какую именно точку она найдёт; посмотрим на программу: запоминание новой точки минимума происходит только тогда, когда только что вычисленное значение F(t) станет **строго меньше**, чем хранящееся в переменной R:

```
if (F(t)< R)then begin
  M:=t;
  R:=F(t);
end;
```

14) поэтому после нахождения точки минимума $x = -5$ никаких изменений не произойдет, и в переменной M останется значение «–5»; таким образом, будет найдет первый минимум
(*Примечание*: если бы в условии было нестрогое неравенство (<=), была бы найдена последняя из точек с минимальной ординатой, M = 5)
15) обратим внимание, что на экран выводится не M, а M+R, поэтому результат будет равен (–5) + 19 = 14
16) Ответ: 14.

Ещё пример задания:

P-16. *Определите, какое число будет напечатано в результате выполнения следующего алгоритма:*

```
Var a,b,t,M,R:integer;
Function F(x:integer):integer;
begin
  F:=abs( abs(x-5) + abs(x+5)- 20 ) + 4;
```

```
end;
BEGIN
  a:=-20; b:=20;
  M:=a; R:=F(a);
  for t:=a to b do begin
    if (F(t)<R)then begin
      M:=t;
      R:=F(t);
    end;
  end;
  write(M+R);
END.
```

Решение:

1) заметим, что в программе есть цикл, в котором переменная **t** принимает последовательно все целые значения в интервале от **a** до **b**:

```
  for t:=a to b do begin
    ...
  end;
```

2) до начала цикла в переменную M записывается значение **a**, а в переменную **R** – значение функции в точке **a**:

```
  M:=a; R:=F(a);
```

3) внутри цикла есть условный оператор, в котором вычисляется значение функции **F(t)** и сравнивается со значением переменной **R**:

```
  if (F(t)<R)then begin
    M:=t;
    R:=F(t);
  end;
```

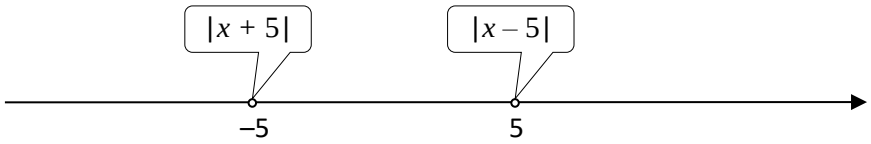
если новое значение функции меньше, чем значение **R**, в **R** записывается значение функции в точке **t**, а в переменной **M** запоминается само значение t (аргумент функции, соответствующий значению в **R**)

4) в результате анализа пп. 1-3 можно сделать вывод, что цикл ищет минимум функции **F(t)** на интервале от **a** до **b**, и после выполнения цикла в переменной M оказывается значение аргумента t, при котором функция достигает минимума на заданном интервале (здесь это интервал [-20, 20])

5) запишем заданную функцию в привычном «математическом» виде:
$f(x) = | \, | \, x - 5 \, | + \, | \, x + 5 \, | \, - 20 \, | + 4$
чтобы найти минимум этой функции без ручного перебора всех целых значений x, нам нужно представлять, как идёт её график

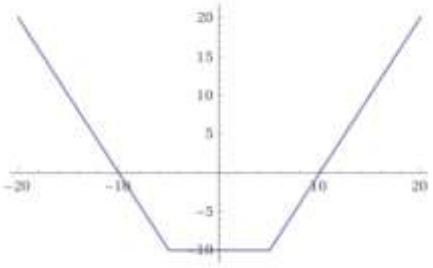
6) сначала рассмотрим функцию под знаком «большого» модуля $g(x) = | \, x - 5 \, | + \, | \, x + 5 \, | - 20$;

7) находим нули выражений под знаком модуля и отмечаем их на числовой оси:

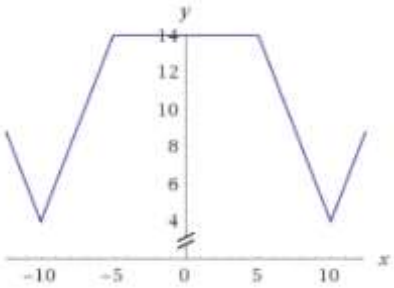


8) рассматриваем интервал $(-\infty; -5)$, раскрываем модули (оба с обратным знаком):
$g(x) = -(x - 5) - (x + 5) - 20 = -2x - 20$
на этом интервале функция $g(x)$ убывает

9) рассматриваем полуинтервал [–5; 5), раскрываем модули:
$g(x) = -(x-5) + (x+5) - 20 = -10$
на этом интервале значение функции $g(x)$ постоянно



10) рассматриваем полуинтервал [5; ∞), раскрываем модули:
$g(x) = (x-5) + (x+5) - 20 = 2x - 20$
на этом интервале функция $g(x)$ возрастает
график функции $g(x)$ показан на рисунке справа



11) как видно по графику, на интервале (–10; 10) функция имеет отрицательные значения; найти границы этого интервала можно решив уравнения
$g(x) = -2x - 20 = 0 \Rightarrow x = -10$
$g(x) = 2x - 20 = 0 \Rightarrow x = 10$
12) поскольку $f(x) = |\ g(x)\ | + 4$, за счёт модуля «язык», вылезший вниз за ось OX, загнётся вверх, так что функция $f(x)$ будет иметь минимальные значения, равные 4, как раз в точках $x = -10$ и $x = 10$ (см. рисунок справа)
13) осталось понять, какую именно точку она найдёт; посмотрим на программу: запоминание новой точки минимума происходит только тогда, когда только что вычисленное значение F(t) станет **строго меньше**, чем хранящееся в переменной R:

```
if (F(t) < R)then begin
  M:=t;
  R:=F(t);
end;
```

14) поэтому в точке второго минимума $x = 10$ никаких изменений не произойдет, и в переменной M останется значение «–10»; таким образом, будет найдет первый минимум
(*Примечание*: если бы в условии было нестрогое неравенство (<=), была бы найдена последняя из точек с минимальной ординатой, M = 10)
15) обратим внимание, что на экран выводится не M, а M+R, поэтому результат будет равен (–10) + 4 = – 6
16) Ответ: – 6.